

Sulle orme del caos

Comportamenti complessi in modelli matematici semplici

Gian Italo Bischi, Rosa Carini, Laura Gardini, Paolo Tenti

Presentazione

La maggior parte dei libri scientifici destinati al pubblico non specializzato cerca di far colpo sul lettore [...] piuttosto che spiegarli in termini chiari e comprensibili gli scopi e i metodi di base.

Albert Einstein, *Il lato umano*

Sappiamo che Menecmo fu il maestro di Alessandro Magno, e la leggenda attribuisce a Menecmo il celebre commento, in risposta alla richiesta da parte del suo regale discepolo di una "scorciatoia" per la geometria: «Mio re, per viaggiare attraverso il paese vi sono strade per i re e strade per i cittadini comuni: ma in geometria c'è un'unica strada per tutti».

Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*

Negli ultimi vent'anni sono stati pubblicati vari libri e articoli divulgativi che trattano di *non linearità* e, in particolare, del fenomeno del *caos deterministico* e delle sue implicazioni, sia dal punto di vista dei modelli matematici che descrivono sistemi reali che si evolvono nel tempo (la turbolenze nei fluidi, il fluttuare irregolare dei prezzi nei mercati finanziari, le variazioni annuali del numero d'insetti di un ecosistema, i mutamenti nelle condizioni atmosferiche...) sia dal punto di vista filosofico ed epistemologico. Anche nella stampa non specializzata è dato incontrare talvolta articoli, anche di buona levatura, che si occupano di questioni relative a *sistemi complessi* che implicano non linearità e *biforcazioni* (talvolta chiamate "catastrofi", alla maniera di René Thom e Christopher Zeeman).

Tuttavia, raramente nelle pubblicazioni di carattere divulgativo è possibile trovare, in forma sufficientemente esauriente, esempi di *semplici modelli non lineari* che illustrino concretamente, o anche operativamente, come possano insorgere comportamenti caotici e che consentano al lettore di risalire alle cause che li provocano. Questo fatto può indurre a ritenere che i modelli matematici usati per descrivere fenomeni caratterizzati da evoluzioni complesse, spesso chiamati "fenomeni caotici", siano necessariamente modelli complicati, governati da un sistema complesso di parametri e variabili, e di conseguenza che il loro studio richieda non solo l'uso di potenti computer ma anche, e soprattutto, conoscenze e metodi matematici molto avanzati. Ciò è certamente vero in molti casi, ma è altresì vero che è possibile osservare comportamenti caotici, capirne il significato, l'importanza, le cause, la natura e "toccarne con mano" le principali proprietà che li caratterizzano, partendo da modelli molto semplici in cui compare *una sola variabile dinamica e un solo parametro*.

L'evoluzione dei fenomeni caotici può essere studiata mediante l'applicazione ripetuta (nota come "iterazione") di semplici *funzioni non lineari*, per esempio funzioni algebriche di secondo o di terzo grado: sono quelle che gli studenti incontrano nelle aule del liceo. Nonostante la loro semplicità, questi modelli consentono di studiare molti dei fenomeni tipici della non linearità. Per esempio, si possono osservare le biforcazioni, che in seguito a piccole variazioni di un parametro portano a notevoli cambiamenti nelle proprietà di un sistema, come la comparsa o scomparsa di equilibri e/o cambiamenti della loro stabilità, o alla comparsa di andamenti più complicati, come le oscillazioni periodiche, non periodiche o caotiche, o a cambiamenti improvvisi nella struttura dei "bacini di attrazione", quando coesistono più "attrattori" (situazione frequente in modelli di fenomeni reali, dove il sistema può evolvere verso situazioni alternative a seconda delle condizioni di partenza).

Nel nostro libro il lettore troverà un certo numero di tali modelli semplici, opportunamente descritti e riccamente illustrati. Abbiamo inoltre cercato d'introdurre alcuni concetti e strumenti recentemente proposti nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto, in particolare quelli sviluppati nell'ambito delle trasformazioni puntuali non invertibili (quali l'uso dei punti critici). Definiti e illustrati in modo elementare, tali concetti ci hanno permesso di dare un'interpretazione geometrica dei fenomeni connessi con la teoria del caos.

In particolare, nel cap. 14 del libro il lettore troverà la descrizione di alcuni algoritmi numerici utilizzati per osservare "sperimentalmente" alcuni dei comportamenti dinamici studiati. Le istruzioni sono relative a programmi di calcolo oggi molto diffusi, come Microsoft Excel e Microsoft Visual Basic. Inoltre, facendosi "navigatore", il lettore potrà visitare la pagina Web del libro, www.brunomondadori.com/sulleormedelcaos, ed eseguire direttamente tali "esperimenti", cimentandosi sia con i programmi riportati nel testo, sia con altri ancora. È questa una modalità di apprendimento divertente, sotto certi aspetti, ma soprattutto efficace per sviluppare una competenza attiva degli argomenti trattati.

Per la comprensione di questo libro sono comunque necessarie alcune conoscenze matematiche di base, che possiamo identificare nella matematica che viene usualmente insegnata nei bienni delle scuole superiori, ovvero un po' di dimestichezza con la manipolazione delle espressioni algebriche, il concetto di funzione e di grafico di funzioni elementari sul piano cartesiano. In alcuni punti abbiamo utilizzato il concetto di derivata, ma tale concetto non è indispensabile per la comprensione degli argomenti esposti nel libro, potendo essere sostituito con il più intuitivo concetto di pendenza della retta tangente al grafico, cosa che viene fatta notare più volte nel corso della trattazione. Abbiamo comunque preferito utilizzare la notazione di derivata in quanto pensiamo che faccia parte del bagaglio di nozioni matematiche possedute da molti potenziali lettori, che immaginiamo (o speriamo) possano includere, oltre che gli studenti del biennio delle scuole superiori, anche quelli degli ultimi anni delle scuole superiori e dei primi anni dell'università, nonché i loro insegnanti e chiunque, interessato all'argomento, abbia competenze matematiche di livello

liceale.

Lo scopo principale del libro è dunque presentare al lettore le proprietà matematiche elementari che stanno alla base di quei modelli dinamici deterministici che generano sequenze caotiche. Ma abbiamo voluto anche mostrare come i modelli dinamici traggano spesso origine dalla necessità di descrivere sistemi reali e come proprio il loro utilizzo nei diversi campi applicativi sia a sua volta all'origine di molte definizioni e proprietà che arricchiscono continuamente la teoria matematica dei sistemi dinamici. Per questo nel primo capitolo, oltre a definire il concetto di sistema dinamico a tempo discreto e dare alcune definizioni matematiche, ci soffermiamo su alcuni “famosi” sistemi dinamici sviluppati per descrivere i sistemi reali della biologia e dell'economia. Questa esposizione può servire sia per assimilare (e apprezzare) la trattazione di carattere più prettamente matematico, sia per comprendere il processo di semplificazione e scarnificazione dei sistemi reali e la conseguente loro traduzione in modelli dinamici costituiti da equazioni semplici e con poche variabili. Naturalmente, presenteremo al lettore anche i limiti di tali modelli, che possono fornire risultati validi solo nei contesti in cui sono verificate le ipotesi semplificatrici utilizzate nella loro costruzione.

Alcuni dei modelli del primo capitolo sono poi ripresi in quelli successivi dove si mostra come, partendo dalla loro forma iniziale, possano essere modificati e generalizzati, diventando via via più complicati. Il lettore che non sia interessato alle applicazioni può evitare la lettura dei paragrafi dedicati agli aspetti più applicativi, e ai relativi sviluppi storici, senza che la comprensione del libro sia compromessa. Questi paragrafi sono segnalati con una nota a piè di pagina. Riteniamo, comunque, che la loro lettura sia importante per capire lo spirito con cui la teoria dei sistemi dinamici si è sviluppata e i metodi di lavoro di coloro che se ne occupano.

Per chiarire questo punto, riportiamo un passo tratto da *Jurassic Park*, il romanzo dello scrittore americano Michael Crichton. In questo libro, ben noto anche per la sua versione cinematografica, uno dei personaggi più importanti è un matematico che, nella Seconda iterazione del libro viene così presentato:

Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i “meccanismi del mondo reale”. Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione d'isolamento dei matematici. Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos. Terza cosa, sembravano voler fare tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale.

Abbiamo riportato questa descrizione sia perché ci sembra molto efficace e fedele alla realtà, sia perché ci permette di rilevare che la teoria dei sistemi dinamici è ormai di casa nel dibattito culturale e nella stampa non specializzata, come dimostrano i riferimenti bibliografici riportati in fondo al libro, con sporadiche incursioni perfino nel campo delle arti grafiche e della musica.

Vogliamo sottolineare che nel lavoro ci è stato di forte stimolo l'appassionato appello che Robert M. May nel 1976 rivolgeva agli insegnanti di matematica dalle pagine della rivista "Nature". In un'epoca in cui «[...] il caos non offriva alcun maestro, non c'erano corsi sul caos, né centri di studi non-lineari e per ricerche sui sistemi complessi, né testi sul caos, e neppure una rivista specializzata»² Robert May, un fisico che si dedicava a ricerche sulla biologia, fu uno dei pionieri dello studio di semplici sistemi non lineari di cui intuiva la portata educativa e culturale. Nel suo appello caldeggiava l'introduzione nei corsi di matematica elementare delle *equazioni alle differenze* ritenendo che l'intuizione degli studenti potesse trarre alimento da certe stravaganze evidenziabili mediante semplici equazioni non lineari. In particolare, auspicava una sollecita introduzione dello studio dell'*equazione logistica*, ritenendola un tipico e suggestivo esempio di come un semplice sistema non lineare possa essere iterato anche solo "a mano" portando alla scoperta di risultati, a dir poco, sorprendenti.

Abbiamo lavorato nello spirito di Robert M. May, cercando di estendere il nostro studio anche ad altri modelli, oltre all'equazione logistica, e utilizzando anche metodi solo recentemente proposti nella letteratura scientifica, pur sforzandoci di rimanere nell'ambito della matematica elementare.

A questo punto, vale la pena raccontare la storia del nostro libro, risultato di un paziente lavoro di collaborazione fra quattro persone, cominciato quando Laura e Gian Italo, docenti di matematica presso la Facoltà di economia dell'Università di Urbino, dove da tempo conducono ricerche sui sistemi dinamici e loro applicazioni, riuscirono a coinvolgere Rosa – Gian Italo era stato suo allievo al liceo – e Paolo, che insegna matematica al liceo, sui temi delle loro ricerche.

Il primo passo è stato compiuto da Laura e Gian Italo che, nel 1998, sentirono la necessità di presentare alcuni concetti e procedimenti relativi alla teoria del caos in una forma rigorosa ma elementare, tale cioè da essere accessibile alla lettura e comprensione di studenti degli ultimi anni del liceo o dei primi bienni universitari delle facoltà scientifiche. Svilupparono il loro progetto in un *Quaderno di Istituto* di circa cinquanta pagine e lo portarono a Rosa. Le illustrarono per sommi capi il contenuto e le chiesero di leggerlo per verificare se e in quale misura il loro scopo fosse stato raggiunto. La pregarono inoltre di segnalare eventuali modifiche o aggiustamenti che si rivelassero necessari o opportuni.

Rosa accettò la proposta. Aveva letto qualche articolo sull'argomento e un paio di libri di taglio divulgativo che aveva trovato affascinanti, in particolare per la forma piacevole della trattazione. Queste letture avevano sollecitato la sua curiosità. Non avendo avuto né tempo né modo di approfondire l'argomento, le sue conoscenze al riguardo erano rimaste piuttosto vaghe. Ora la situazione cambiava, c'era il *Quaderno* di Gian Italo e Laura: poteva non solo leggerlo e rileggerlo con tutto comodo, ma anche discuterne con loro, avere il sostegno delle loro spiegazioni, il conforto del loro aiuto. Perciò si mise all'opera con entusiasmo.

La lettura del *Quaderno* si rivelò più ostica del previsto. L'esposizione, all'apparenza lineare e

scorrevole, presentava un contenuto che, oltre a presupporre certe conoscenze di base, era molto denso e sintetico. Ogni periodo era un concentrato di concetti e di conoscenze, così nuovi e diversi dai consueti, che le riusciva difficile tradurli in espressioni linguistiche meno astratte e quindi più intuitive e comprensibili.

Nel tentativo di superare questa difficoltà, Rosa decise di riprendere in considerazione un concetto alla volta, in modo da individuarne significati, aspetti, collegamenti o analogie con altri concetti. In altre parole, occorreva “addomesticare” il *Quaderno*, renderlo più accessibile mediante una descrizione semplice e intuitiva. Rifece ogni calcolo senza omettere alcun passaggio e ricorrendo, in caso di necessità, a una semplice calcolatrice tascabile. Inoltre, utilizzando strumenti del tutto tradizionali, come una matita ben appuntita e un blocco di carta millimetrata (e una gomma!) rielaborò alcune figure che nel *Quaderno* erano state ottenute al computer.

Laura e Gian Italo seguivano assiduamente questo lavoro di rielaborazione: leggevano la revisione di ogni capitolo, correggevano, suggerivano modifiche, consigliavano miglioramenti e aggiunte, avendo cura che la “volgarizzazione” dei concetti e dei procedimenti non ne travisasse il significato e il valore. Dopo varie rielaborazioni si ebbe la seconda versione del primitivo *Quaderno*. Il lavoro di lima sul linguaggio, la diluizione dei concetti, le nuove esemplificazioni e le rappresentazioni grafiche più numerose e dettagliate ne facilitavano la lettura. Sembrava quindi raggiunto lo scopo di renderlo leggibile anche a persone ignare dell’argomento, pur conservando un approccio “operativo”.

Questa seconda versione del *Quaderno* fu quindi affidata a Paolo che, oltre a essere insegnante di matematica, è esperto di grafica al computer e di programmazione. Egli ebbe il compito non solo di sistemarne l’aspetto grafico, ma soprattutto di farne una nuova lettura critica, individuando spunti di natura didattica che migliorassero il lavoro e che fossero eventualmente utilizzabili per qualche attività di sperimentazione nelle sue classi di liceo. Durante questa rilettura e revisione, Paolo e Gian Italo lavorarono in stretto contatto e in più punti il testo venne arricchito, migliorato, precisato, nonché abbellito con illustrazioni elaborate da Paolo. A questo punto si era giunti alla terza versione del primitivo *Quaderno* e, dopo un’ultima rilettura “a quattro”, pensammo di essere arrivati al capolinea.

Non vorremmo essere tacciati di presunzione se riteniamo di offrire al lettore una guida agile, e coinvolgente, basata su *concetti di base* ed *esperimenti matematici*: un iter che lo porta gradualmente, ma senza esitazioni, alla scoperta di concetti e conoscenze in un campo fra i più attraenti della recente ricerca matematica. Il nostro intendimento è stato quello di aiutare il lettore a compiere un percorso di “scoperta guidata” dei concetti che stanno alla base di questo settore della matematica. Non gli chiediamo molto: solo un po’ di complicità e, occasionalmente, l’impegno a compiere qualche piccolo sforzo. Aggiungiamo che, a nostro avviso, raramente la mente umana può conoscere un’esaltazione così pura e gratificante come quando perviene alla comprensione di una questione complessa e giunge alla scoperta e al possesso di nuove conoscenze. Il pensiero di agevolare questo processo è stato la molla che ci ha spinti a sviluppare un

lavoro che è stato tanto più impegnativo, in quanto doveva apparire facile al lettore.

Questi sono, dunque, la storia del nostro lavoro e lo scopo che ci siamo prefissi. Come si è soliti fare, concludiamo questa premessa con alcuni ringraziamenti: troppo pochi, se dovessimo considerare tutti coloro che a vario titolo meriterebbero di essere ringraziati. In particolare, ringraziamo Angelo Guerraggio, per aver creduto nel nostro lavoro e per averci incoraggiato, oltre che per aver contribuito al suo miglioramento con preziosi suggerimenti. Incoraggianti commenti ci sono arrivati anche da Giovanni Prodi, che ha letto con attenzione il manoscritto. Ringraziamo inoltre Anna Agliari, Vincenzo Camporeale, Roberto Dieci, Franco Gori, Fabio Lamantia, Riccardo Righi e Lucia Sbragia per i loro commenti sulla prima versione del manoscritto. Un particolare ringraziamento a Claudio Piga che ha curato la realizzazione editoriale di questo libro: nel migliorarne il testo e la grafica, ha svolto una paziente revisione dei passaggi logici e algebrici, oltre a fornire preziosi suggerimenti e incoraggiamenti agli autori. Ringraziamo sentitamente Marco Vavassori, che ha sperimentato con noi e realizzato l'immagine di copertina.

Gli autori.